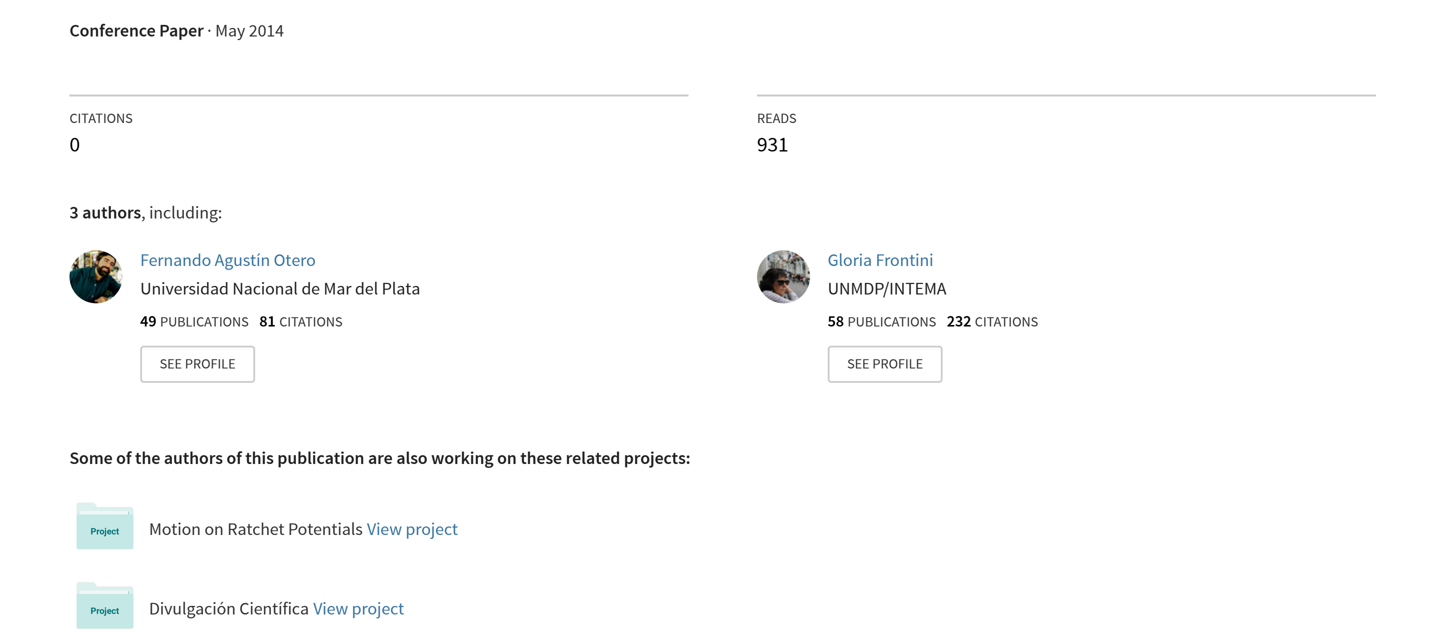
Estimación y Regularización en Problemas Inversos en Ingeniería

Conference Paper · May 2014



Estimación y Regularización en Problemas Inversos en Ingeniería

Fernando Otero[1,2], María Gabriela Messineo[1] y Gloria Frontini[1,2]
[1]Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Juan B. Justo 4302, 7600 Mar del Plata, Argentina
[2]Instituto de Investigaciones en Ciencia y Tecnología de Materiales, Universidad Nacional de Mar del Plata y Consejo de Investigaciones Científicas y Técnicas, Juan B. Justo 4302, 7600 Mar del Plata, Argentina
{gfrontin, gmessineo, foterovega }@fi.mdp.edu.ar

Resumen. Este trabajo presenta una breve revisión de los conceptos de estimación y regularización en el área de problemas inversos. Tras una básica descripción del marco teórico de los problemas inversos se introducen dos conceptos fundamentales en el área como son los de estimación y regularización. Finalmente se concluye con una breve recapitulación de dos ejemplos de problemas inversos específicos en los que los autores han estado trabajando, señalando algunos de los resultados obtenidos en relación con la temática abordada.

Palabras Clave: Regularización, Problemas inversos, Estimación de parámetros

1 Introducción

Los problemas inversos se refieren a problemas que siguen el camino inverso al que naturalmente se recorre desde una perspectiva física. Es decir, si un determinado proceso físico sigue cierto camino, el problema inverso es el definido en el sentido opuesto al mismo. En este trabajo en particular, se formulan problemas inversos basados en modelos, para inferir los parámetros o funciones que lo definen. Dicho modelo permite vincular con las magnitudes deseadas ciertas mediciones de magnitudes indirectamente relacionadas con ellas.

Existen numerosos ejemplos aplicados a ingeniería que se representan como problemas inversos basados en modelos que incluyen problemas de ultrasonido [1], tomografía [2], [3], transferencia de calor [4], [5], entre otros.

Para poder plantear un problema inverso es necesario relacionar los parámetros de un sistema con las observaciones o mediciones que puedan realizarse del mismo. En este sentido, suponiendo conocidas las leyes físicas que gobiernan al sistema, es posible definir un operador F que relacione los parámetros m del modelo con los datos experimentales d de acuerdo a la forma general de la ec.(1)

$$F(m) = d. \qquad \textbf{(1)}$$

Bajo esta estructura, el problema inverso puede formularse del siguiente modo:

Sean los espacios normados G y D y sea F: $G \rightarrow D$ un operador (lineal o no-lineal), entonces dado $d \in D$, el problema inverso consiste en obtener $m \in G$ tal que $F(m) = d$.

Los ejemplos que pueden expresarse de acuerdo a la formulación de la ec.(1) pueden ser de naturaleza continua o discreta. Es decir, los datos d pueden ser una función continua de determinadas variables o un conjunto de observaciones discretas. Del mismo modo, m puede ser una función continua o un simple conjunto de valores. F puede tomar diversas formas: cuando se trabaja con m y d como funciones continuas, F se refiere a un operador que puede estar representado por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) o ecuaciones en derivadas parciales (EDP) entre otros; mientras que si m y d son de forma vectorial, F queda representado por una matriz.

Por otro lado, en la mayoría de los casos, lo que se desea es obtener un número finito N de parámetros que definan al modelo. Estos parámetros pueden representar directamente una magnitud física o bien coeficientes o constantes de una relación funcional. Si a esto le sumamos que en la práctica se requiere el uso de un número finito de datos experimentales, los problemas inversos resultantes son de naturaleza discreta. En los problemas discretos lineales la ec.(1) se expresa en forma matricial como:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{d} \qquad \textbf{(2)}$$

donde $\mathbf{F} \in \Re^{MxN}$, $\mathbf{m} \in \Re^{N}$ y $\mathbf{d} \in \Re^{M}$

1.1 Mal condicionamiento de los problemas inversos

Los problemas inversos resultan generalmente mal condicionados o mal planteados. Este mal condicionamiento se expresa como el incumplimiento de alguna de las llamadas condiciones de Hadamard [6], que son existencia, unicidad y estabilidad de la solución.

Respecto de la condición de existencia, puede que no haya un modelo que ajuste perfectamente un conjunto de datos dado, principalmente si el modelo matemático de la física del sistema es aproximado y/o los datos contienen ruido. Sin embargo, el incumplimiento en la propiedad de existencia no resulta un obstáculo insuperable en la práctica, ya que siempre se puede forzar esta condición extendiendo el espacio de soluciones, aceptando ajustar la solución del problema a los datos en algún sentido aproximado, como se verá más adelante.

La existencia de múltiples soluciones es una dificultad mayor. Si un problema presenta varias soluciones surge el inconveniente de decidir cuál de todas las soluciones es la que debemos escoger. Para realizar esta decisión es necesario elegir un criterio que permita decidir la solución de interés, si es posible, mediante la inclusión de información adicional. La falta de unicidad en la solución se debe principalmente a que en la práctica sólo una cantidad limitada de datos está disponible para reconstruir el modelo.

Finalmente está la condición de estabilidad que es la que a menudo no se cumple. La estabilidad se refiere a que la solución del problema inverso dependa en forma continua de los datos. Esta falta de continuidad en la solución se traduce en que pequeños errores existentes en las mediciones generan grandes errores en el modelo. Una manifestación de esta inestabilidad puede observarse en los problemas inversos lineales discretos a través del llamado número de condición κ de la matriz del sistema $\mathbf{F}$. El número de condición definido en la ec.(3) como el cociente entre los valores singulares s_i con máximo y mínimo valor absoluto, es una medida de la magnificación del ruido numérico en algoritmos de computadora con doble precisión y ocurre cuando κ es del orden de 10^{12}. Sin embargo, los problemas de estabilidad aparecen cuando la amplificación del ruido en los datos se hace importante, cosa que puede ocurrir para valores de κ bastante menores [7].

$$\kappa = \frac{\max_i |s_i|}{\min_i |s_i|} \qquad \textbf{(3)}$$

2 La estimación y la regularización en los problemas inversos

Un concepto muy importante es que en los problemas reales, la resolución de un problema inverso consiste, en realidad, de dos pasos (Fig. 1):

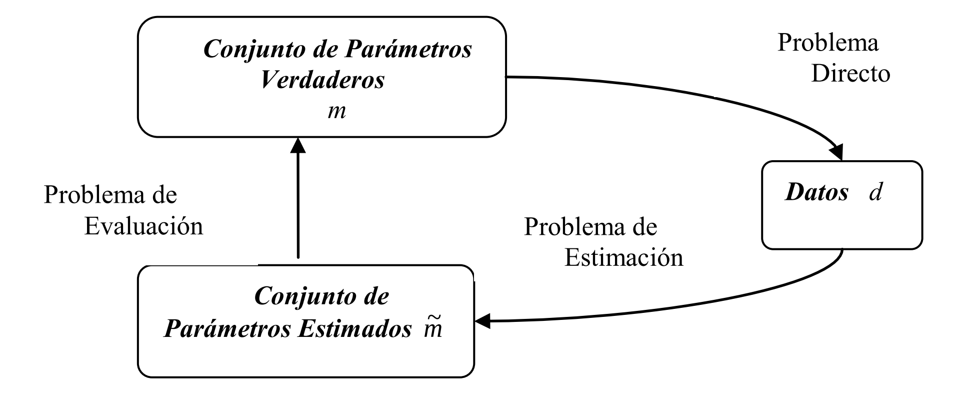


Fig. 1. Esquema del problema inverso como suma de estimación y evaluación

Primero, a partir de los datos d se obtiene un conjunto de parámetros estimado $\tilde{m}$ en lo que constituye un problema de estimación. Pero además de estimar el conjunto de parámetros $\tilde{m}$ que sea consistente con los datos, como segundo paso es necesario investigar la consistencia de $\tilde{m}$ con el conjunto de parámetros verdaderos. Este es el problema de evaluación del modelo, en el que uno determina qué propiedades del modelo verdadero son recuperadas por el conjunto de parámetros estimados y qué errores incluye el mismo. Es decir, no tiene mucho sentido realizar una interpretación física bajo un modelo sin reconocer el hecho de que el modelo posee errores [8].

Es importante señalar que en realidad los dos pasos mencionados sufren una constante realimentación de uno sobre el otro. Así como el problema de evaluación depende de los resultados del problema de estimación, el problema de estimación se ve modificado de acuerdo a los resultados del problema de evaluación. Un ejemplo claro de esto puede observarse en el uso de la inversión directa en el problema. Realizar una inversión directa del problema es equivalente a construir un operador que mapee los datos en los parámetros estimados [9], [10]. Por ejemplo, para problemas inversos discretos lineales, el mapeo lineal más general de los datos d al conjunto de parámetros estimado $\tilde{m}$ puede escribirse en su forma matricial como:

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{F}^{-g}\mathbf{d} \qquad \textbf{(4)}$$

donde $\mathbf{F}^{-g}$ es llamada *inversa generalizada* de la matriz $\mathbf{F}$

En este sentido, si bien la inversión directa siguiendo la forma de la ec.(4) puede dar buenos resultados en algunos casos, en muchos otros, la falla en el cumplimiento en la condición de estabilidad hace que la propagación de errores en una inversión directa conduzca a resultados sin ningún sentido físico.

En este punto es donde se introduce el concepto de regularización que consiste en aproximar la solución mediante una familia de problemas estables cercanos [11]. Es importante destacar que en muchos casos la propia parametrización del problema inverso puede considerarse una regularización. En términos generales, la estabilización de la solución se obtiene incluyendo toda la información a priori posible durante la etapa de estimación. Si bien esta información adicional sobre los parámetros m puede incluirse de diversas formas [12], los principales métodos siguen el criterio de permitir cierto residuo asociado con la solución regularizada, donde los residuos corresponden a los errores de ajuste en los datos, e. La norma de estos residuos $\|e\|$ se define entonces de la forma más general como $\rho(m)$ de acuerdo a la ec.(5):

$$\rho(m) = \|e\| = \|F(m) - d\|. \qquad \textbf{(5)}$$

Si se resuelve el problema de estimación a través de la minimización del cuadrado de $\rho(m)$ directamente surge el conocido método de estimación por mínimos cuadrados. Existen numerosos algoritmos basados en este método que son empleados tanto para modelos lineales como no-lineales. Entre estos algoritmos se encuentran los llamados métodos iterativos: el método de Newton y sus variantes, el método de Gauss-Newton y el de Levenberg-Marquardt, los que son de mucha utilidad en la resolución de problemas inversos no lineales, pues permiten llevar a cabo una linealización del problema alrededor de un valor inicial estimado.

El método de Newton es muy eficiente y rápido en los casos en que F es continuamente diferenciable. Sin embargo, si esto no ocurre o el valor inicial está muy lejos del óptimo, el método puede converger muy lentamente o incluso fallar.

Los otros dos métodos mencionados procuran asegurar la convergencia de la solución a un mínimo global. En particular, el método de Levenberg-Marquardt agrega un parámetro γ con este fin. El valor de γ es una medida de la relación de compromiso entre velocidad y convergencia del problema: para valores pequeños de γ el método se comporta de manera similar al de Newton y, a pesar de ser más veloz, no asegura la convergencia; en el otro extremo, para γ grande, el comportamiento es el del método steepest-descent, de convergencia lenta pero segura. La determinación correcta de γ es por lo tanto de suma importancia para tener un buen desempeño del algoritmo.

Por otro lado, si incluimos regularización de modo explícito en el problema de estimación existen cuatro grandes esquemas:

1) Minimizar $\rho(m)$ sujeto a la restricción de que m pertenezca a un subconjunto específico de soluciones.

2) Minimizar $\rho(m)$ sujeto a la restricción de que una medida del tamaño de m, $\omega(m)$, sea menor que alguna cota superior especificada δ, es decir $\omega(m) < \delta$.

3) Minimizar una medida del tamaño de m sujeto a la restricción $\rho(m) < \alpha$.

4) Minimizar una combinación lineal de $[\rho(m)]^2$ y $[\omega(m)]^2$ siguiendo la forma de la ec.(6).

$$\min\left\{[\rho(m)]^2 + \lambda[\omega(m)]^2\right\} \qquad \textbf{(6)}$$

Si se aplica el cuarto esquema, definido en la ec.(6), a un problema discreto lineal es fácil demostrar que la solución de mínimos cuadrados regularizada es como se muestra en la ec.(7).

$$\tilde{\mathbf{m}} = \left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} + \lambda \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \qquad \textbf{(7)}$$

donde la información a priori está concentrada en la denominada matriz de regularización $\mathbf{R}$, y λ es el llamado coeficiente o parámetro de regularización no negativo que controla el comportamiento de la solución, dando más peso relativo a la información a priori o a los datos, de acuerdo al mayor o menor valor asignado, respectivamente. El cálculo de λ no es una tarea trivial. Su valor jugará un papel fundamental para la obtención de resultados aceptables en la solución del problema inverso [13]. Diversos métodos han sido desarrollados para su cálculo, tales como el principio de discrepancia [14], el método de validación cruzada generalizada o GCV [15] y el método de la curva L [16] entre otros.

Volviendo a la ec.(7), matemáticamente $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} + \lambda \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}$ resulta una matriz simétrica definida positivamente y por lo tanto es invertible. De aquí que el efecto de la regularización es garantizar la invertibilidad de $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} + \lambda \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}$ al corregir el mal condicionamiento de $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$ produciendo de esta forma una solución estable. Este enfoque es llamado regularización de Tikhonov [17], o de Tikhonov-Phillips o a veces de Tikhonov-Miller como consecuencia del aporte de los trabajos previos de Phillips [18] y Miller [16].

En la sección 1.1, se mencionó que el mal condicionamiento de un problema inverso lineal está relacionado con el número de condición y en realidad regularizar el problema inverso es llevarlo a un problema aproximado con un número de condición menor. Para lograr esto existen diversas técnicas además de la de Tikhonov. Por ejemplo, en problemas inversos discretos lineales es posible emplear la denominada descomposición en valores singulares (SVD) y así acortar la diferencia entre el máximo y el mínimo valor singular, a través del truncamiento de los mismos (método conocido como SVD Truncada o TSVD) donde el número de valores singulares *k* considerados tras el truncamiento hace las veces de coeficiente de regularización en este caso. Otro ejemplo para bajar el número de condición de un problema inverso discreto lineal surge cuando el vector incógnita $\mathbf{m}$ de la ec.(2) representa una función *m(x)* y la idea es descomponerlo en una base de funciones $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_S(x)$ de modo que $m(x) = \sum_{j=1}^{S} c_j b_j(x)$. Ahora las nuevas incógnitas son los coeficientes c_j y el problema inverso resultante corresponde a la ec.(8), que debería tener un valor de κ menor. Este método es conocido como método de proyección

$$\mathbf{F}^{*} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{d} \qquad \textbf{(8)}$$

donde $\mathbf{F}^{*} \in \Re^{MxS}$, $\mathbf{c} \in \Re^{S}$ y $\mathbf{d} \in \Re^{M}$

Finalmente, es importante mencionar que si bien todo lo que se ha explicado hasta ahora se refiere a problemas inversos analizados desde un punto de vista determinista, donde la solución hallada es un conjunto de parámetros con valores certeros con un intervalo de confianza, los conceptos de estimación y regularización también se extienden a un análisis probabilista. En particular, los autores han trabajado en la resolución de problemas inversos mediante análisis Bayesiano. En este caso las soluciones buscadas quedan expresadas como una función densidad de probabilidad a posteriori de las variables del problema, consideradas ahora como variables aleatorias. Esta función de probabilidad a posteriori de las variables $p(m/d)$ es estimada aplicando el denominado teorema de Bayes de acuerdo a la ec.(9)

$$p(m/d) = \frac{p(d/m)\,p(m)}{p(d)} \qquad \textbf{(9)}$$

donde $p(d/m)$ es la densidad de probabilidad condicional de los datos d dados los parámetros del modelo m, también llamada función de verosimilitud **;** $p(m)$ es la densidad de probabilidad a priori de los parámetros del modelo y $p(d)$ es la densidad de probabilidad de los datos d.

En este contexto se hace uso de la información adicional de los parámetros y/o funciones buscadas, obtenida previamente a las mediciones, incluyéndola en la densidad de probabilidad a priori de los parámetros del modelo $p(m)$. De hecho, desde un punto de vista Bayesiano muchas técnicas clásicas deterministas de regularización equivalen a imponer ciertas densidades de probabilidad a priori en los parámetros del modelo y, del mismo modo, el enfoque Bayesiano puede usarse para la selección del correspondiente parámetro de regularización.

3 Ejemplos de aplicación

3.1 Problema de estimación de la Distribución de Tamaños de Partículas (DTP) mediante mediciones de Dispersión de Luz Estática (DLE)

En el área de la caracterización de materiales formados por sistemas de partículas, el problema de estimar la Distribución de Tamaños de Partículas (DTP) mediante técnicas ópticas es un problema inverso de especial interés. La importancia de obtener la DTP es que el comportamiento del material depende en gran medida de la misma. Si bien existen técnicas que permiten una estimación directa de la DTP, como por ejemplo la microscopía electrónica, las mismas poseen en general la desventaja de ser costosas, invasivas y emplear solo una pequeña fracción de partículas. Por estas razones, las técnicas de medición indirectas resultan una alternativa importante. Dentro de este último grupo, los ensayos con técnicas ópticas poseen la ventaja de ser no-destructivos y en particular, la Dispersión de Luz Estática (DLE) ha sido ampliamente utilizada debido a la sencillez de su aplicación. La técnica de DLE consiste básicamente en incidir sobre la muestra con un haz láser y registrar la intensidad del haz de luz dispersado a distintos ángulos $I_s(\theta)$ con un arreglo de fotodiodos. Específicamente, los autores han concentrado su trabajo en partículas esféricas con lo cual la DTP puede ser expresada como una función del radio $f(\mathrm{R})$. El proceso de estimación de $m=f(\mathrm{R})$ a partir de los datos experimentales, $I_s(\theta)$, requiere del uso de modelos para llevar el problema a la forma de la ec.(1). En este sentido, se ha trabajado tanto con un modelo aproximado [19] como con uno de mayor exactitud [20].

Para ambos modelos empleados se ha estudiado el efecto de la regularización del problema simplemente a través de la parametrización de $f(\mathrm{R})$ empleando para ello alguna familia de distribuciones que permitan expresar pequeñas posibles asimetrías, como lo es la distribución log-normal. Este problema de estimación paramétrica se ha resuelto inicialmente mediante un enfoque determinista clásico en una estimación por mínimos cuadrados no lineales en [21], [22], empleando el algoritmo de Levenberg-Marquardt [23]. El mismo esquema fue aplicado en [24], [25], en estos casos con el fin de comparar y evaluar los modelos físicos considerados. Más recientemente el esquema paramétrico fue aplicado empleando un enfoque Bayesiano [26], [27], [28], siguiendo la ec.(9) con el fin de mejorar las estimaciones previas y superar algunas de las limitaciones encontradas en el esquema determinista clásico.

Sin embargo, la parametrización de la DTP implica una suposición previa muy importante y resta generalidad a la metodología. Por esto se han considerado los llamados métodos de forma libre donde no hay restricción de la forma de la DTP y han sido aplicados en particular al modelo aproximado de [19]. En este sentido, en [29] los autores propusieron un proceso iterativo que hace uso de la regularización de Tikhonov de la ec.(7), que fue luego aplicado exitosamente al problema de la estimación de la DTP en casos simulados en [21] y en casos experimentales en [30]. En este último trabajo asimismo se comparó el desempeño de algunos métodos para el cálculo del parámetro de regularización. En [31] los autores han estudiado el método de proyección explicado anteriormente empleando splines como las funciones que componen la base, y lo han aplicado al problema de estimación de la DTP. El problema inverso resultante, que queda en la forma de la ec.(8), fue resuelto mediante

regularización de Tikhonov y TSVD. Finalmente, un nuevo método de forma libre ha sido desarrollado bajo el enfoque Bayesiano en [32]. El uso de este método, con ciertos cuidados especiales, parece obtener mejoras importantes de precisión en los resultados cuando se incluye información adicional confiable de los parámetros estadísticos de radio medio y varianza de la DTP.

3.2 Análisis inverso de la información de una onda ultrasónica para la caracterización de materiales en capas

Otro problema que se ha abordado dentro del área de caracterización de materiales considera materiales compuestos, de gran interés en la actualidad debido al creciente uso de los mismos en diversas áreas de la industria. Un material compuesto es aquel en el que se unen dos o más materiales para combinar sus propiedades, mejorando sus prestaciones en cuanto a dureza, aislamiento térmico o acústico, peso, resistencia térmica, resistencia a la corrosión, etc. Un tipo particular de materiales compuestos son los formados por capas, hallados en varias aplicaciones de ingeniería, en especial en las industrias aeronáutica, automotriz y en la ingeniería civil. También en investigación biomédica suelen tratarse a ciertas estructuras formadas por tejidos como si fuesen materiales en capas, como en el caso de los dientes o los huesos [33].

La caracterización de este tipo de materiales involucra aspectos tales como la detección de daño, delaminación, fracturas, o bien, la determinación de propiedades físicas de la capas (densidad, módulo elástico, velocidad de propagación, atenuación). La medición directa de estas propiedades no es sencilla y en la mayoría de los casos ni siquiera es posible. Es por eso que se recurre a medir magnitudes indirectamente relacionadas con las propiedades buscadas, a partir de las cuales y mediante la utilización de una metodología inversa se pretende obtener la estimación de parámetros característicos del material.

En este trabajo los datos con que se cuenta corresponden a mediciones de señales ultrasónicas transmitidas por el material y registradas en un extremo de la muestra. Bajo ciertas suposiciones, los ensayos de transmisión pueden ser bien representados por modelos equivalentes basados en circuitos eléctricos [34]. Se utiliza una novedosa técnica para procesar los datos, empleando un modelo equivalente en el dominio de la frecuencia basado en la línea de transmisión eléctrica tipo T y que permite un importante ahorro de recursos de cálculo [35], [36] en comparación con los métodos de procesamiento tradicionalmente usados.

El problema inverso se ha formulado de acuerdo a la ec.(6), y se ha resuelto aplicando el algoritmo de minimización de Levenberg-Marquardt [23]. El resultado del problema, m, es un conjunto de parámetros relacionados con las propiedades físicas mencionadas antes. Estos son las impedancias acústicas y los tiempos de tránsito de cada una de las capas, que pueden ponerse en términos de la densidad, las constantes elásticas y la velocidad de propagación respectivas.

Durante el estudio del condicionamiento del problema se ha llegado a la conclusión de que, si bien existe una solución única, también aparecen múltiples mínimos locales. Esto ha hecho necesario incluir información a priori de los tiempos de tránsito a fin de obtener una minimización exitosa. En cuanto al estudio de la estabilidad, se han llevado a cabo simulaciones con diferentes niveles de ruido sumado a los datos y también considerando errores en el modelo. El problema mostró ser estable y por lo tanto no fue necesario el término de regularización representado por el parámetro λ en la ec.(6).

4 Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo se ha presentado una revisión de algunos aspectos del área denominada problemas inversos, y se han incluido un par de ejemplos de aplicación a la caracterización de los materiales, desarrollados por los autores, quienes se desempeñan como docentes de grado y posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Los mismos integran la cátedra de Matemática Avanzada, materia básica para las carreras de ingeniería, cuyos contenidos son indispensables para incurrir luego en temas de posgrado y proyectos de investigación en la Matemática Aplicada a Ingeniería, siendo el área de problemas inversos una de especial interés en los momentos actuales.

Agradecimientos. Los autores agradecen el apoyo del Departamento de Matemática de la .Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata y del Instituto en Ciencia y Tecnología de Materiales del CONICET.

Referencias

1. Rus, G.; García-Martínez, J.: Ultrasonic tissue characterization for monitoring nanostructured TiO_2-induced bone growth. *Physics in Medicine and Biology*, Vol. 52, pp.3531–3547 (2007)
2. Gonatas, C.P.; Ishi, M.; Leigh, J.S.: Optical diffusion imaging using a direct inversion method. *Phys Rev E* Part B, Vol. 52, pp. 4361-4365 (1995)
3. Markel, V.A.; Schotland, J.C.: The inverse problem in optical diffusion tomography. I. Fourier-Laplace inversion formulas. *Journal of the Optical Society of America A*, Vol. 18, pp. 1336-1347 (2001)
4. Alifanov, O.M.: *Inverse Heat Transfer Problems*. Springer Verlag (1994)
5. Osizik, M.N.; Orlande, H.R.B.: *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*. Taylor & Francis (2000)
6. Hadamard, J.: *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale Univ. Press (1923)
7. Santamarina, J.C.; Fratta, D.: *Discrete Signals and Inverse Problems. An Introduction* to *Engineers and Scientists*. John Wiley and Sons (2004)
8. Trampert, J.: Global seismic tomography: the inverse problem and beyond. *Inverse Problems*, Vol. 14**,** pp. 371-385 (1998)
9. Tarantola, A.: *Inverse problem theory*. Elsevier (1987)
10. Parker, R.L.: *Geophysical Inverse theory*. Princeton University Press (1994)
11. Hansen, P.C.: *Rank-Deficient and discrete ill-posed problems*. SIAM (1998)
12. De Mol, C.: A critical survey of regularized inversion methods. *Inverse Problems in Scattering and Imaging*, pp. 345-370 (1992)
13. Thompson, A.M.; Brown, J.C.; Kay, J.K.; Titterington, D. M.: A study of methods for choosing the smoothing parameter in image restoration by regularization. *IEEE Trans.Pattern Anal. Machine Intell.***13**, pp. 3326-3339 (1991)
14. Morozov, V.A.: On the solution of functional equations by the method of regularization. *Soviet Math Dokl*, Vol..7, pp. 414-417 (1966)
15. Golub, G.H.; Heath, M.; Whaba, G.: Generalized Cross-Validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, Vol.21, pp. 215-223 (1979)
16. Miller, K.: Least squares methods for ill-posed problems with a prescribed bound, *SIAM J., Math. Anal.* **1,** pp. 52-74 (1970)
17. Tikhonov, N.; Arsenin, V.Y.: *Solution of Ill-Posed Problems*. Winston & Sons (1977)
18. Phillips, D.L.: A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. *J. ACM*, Vol.. 9**,** pp. 84-97 (1962)
19. Pedersen, J. S.: Determination of size distribution from small-angle scattering data for systems with effective hard-sphere interactions. *J. Appl. Cryst.* , Vol. 27, pp. 595–608 (1994)
20. Vrij, A.: Mixtures of hard spheres in the Percus-Yevick approximation. Light scattering at finite angles. *J. Chem. Phys.*, Vol. 71, pp.3267-3274 (1979)
21. Frontini, G.; Otero, F.; Messineo, M.G.; Eliçabe, G.: Estimation of Size Distribution in Concentrated Particle Systems from Light Scattering Measurements. *Inverse Problems in Eng.,* Vol. 16, pp. 995-1004 (2008)
22. Otero, F.; Frontini, G.; Eliçabe, G.: Inversión de Mediciones Experimentales de Dispersión de Luz mediante el Modelo de "Hard Spheres". *Mecánica Computacional*, Vol. 28, pp. 2733-2744 (2009)
23. Marquardt, D.: An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 11, pp. 431–441 (1963)
24. Otero, F.; Frontini, G.; Eliçabe, G.: Inversión de datos de dispersión de luz de sistemas concentrados de partículas para identificar sus parámetros. *Actas de XIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control* (RPIC 2009), pp. 709-714 (2009)
25. Otero, F.A.; Frontini, G. L.; Eliçabe, G. E.: Evaluation of Light Scattering Models to Characterize Concentrated Polymer Particles embedded in a solid polymer matrix. *J. of Polymer Science Part B: Polymer Physics*, Vol. 48, pp. 958-963 (2010)
26. Otero, F.; Frontini, G.; Eliçabe, G.; Orlande, H.: Análisis Bayesiano aplicado a la estimación del tamaño de partículas mediante mediciones de dispersión de luz. *Actas del Tercer Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial* (MACI), pp. 519-522 (2011)
27. Otero, F.; Frontini, G.; Eliçabe, G.: Inversión de Señales de Dispersión de Luz para estimar Distribución de Tamaños con Enfoque Bayesiano. *Actas de XIV Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control* (RPIC 2011), pp. 696-700 (2011)
28. Otero, F.; Frontini, G.; Eliçabe, G.: Método Bayesiano para el procesamiento inverso de mediciones de dispersión de luz con información de microscopía electrónica utilizando el modelo de "hard spheres" para mezclas finitas. *Actas de XV Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control* (RPIC 2013), pp. 409-414 (2013)
29. Frontini, G.; Fernández Berdaguer, E.: Inversion of Elastic Light Scattering measurements to determine Refractive Index and Particle Size Distribution of Polymeric Emulsions. *Inverse Problems in Eng.,* Vol. 11, pp. 329-340 (2003)
30. Otero, F.; Frontini, G.; Soulé, E.; Eliçabe, G.: Estimación de la distribución de tamaños de partículas poliméricas embebidas en una matriz de polímero. *Mecanica Computacional,* Vol. 27, pp. 2817-2827 (2008)
31. Codagnone, T.; Otero, F.; Barbano, R.; Frontini, G.: Solución de un problema inverso mediante proyección por splines. *Actas del XIV Encuentro Nacional y VI Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería* (EMCI 2008), (6 pp) (2008)
32. Otero, F.; Frontini, G.; Eliçabe, G.: Enfoque Bayesiano para la Inversión No Paramétrica de Mediciones de Dispersión de Luz. *Mecanica Computacional,* Vol. 31, pp. 3239-3254 (2012)

33. Leite, J.C.B.; San Emeterio, J.L.; Pereira, W.C.A.:Reflection and Transmisión of Plane Ultrasonic Pulses in a Three Layer Biological Structure. *Proceedings of the 19th International Congress on Acoustics* (ICA 2007), (2007)
34. Cheeke, J. D. N.: Non-destructive Evaluation (NDE) of materials in *Fundamentals and applications of ultrasonic waves*. CRC Press LLC (2002).
35. Messineo, M. G.; Frontini, G. L.: Identificación de Propiedades Acústicas de Materiales en Capas, *Actas del X Congreso Argentino de Mecánica Computacional,* (MECOM 2012) (2012)
36. Messineo, M.G., Frontini, G.L, Eliçabe, G.E., Gaete-Garretón, L.: Equivalent Ultrasonic Impedance in Multilayer Media. A Parameter Estimation Problem. *Inverse Problems in Science and Engineering,* DOI:10.1080/17415977.2012.757312. (2012).